

Total number of printed pages-36

3 (Sem-1/CBCS) MAT HG/RC

2022

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

For Honours Generic

Attempt either MAT-HG-1016 *or* MAT-HG-1026

For Regular

Attempt MAT-RC-1016

*The figures in the margin indicate
full marks for the questions.*

Answer either in English or in Assamese.

OPTION-A

Paper : MAT-HG-1016/MAT-RC-1016

(Calculus)

Full Marks : 80

Time : Three hours

Contd.



1. Answer **any ten** questions : $1 \times 10 = 10$
যিকোনো দহটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the value of $\sin 1680^\circ$.

$\sin 1680^\circ$ ৰ মান উলিওৱা।

(b) Write the range of the function

$$f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^2 + 4}$$

$f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^2 + 4}$ ফলনটোৰ পৰিসৰ লিখা।

(c) Write the equation which shifted the graph of the equation $x^2 + y^2 = 49$ into 3 units down and 2 units left.

$x^2 + y^2 = 49$ সমীকৰণৰ লেখটোক 3 একক ওললৈ আৰু 2 একক বাওঁফালে স্থানান্তৰ কৰা সমীকৰণটো উলিওৱা।

(d) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) : $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x)$

(e) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) : $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$

(f) Is $f(x) = \sin x$ one-one on the interval $[0, \pi]$?

$f(x) = \sin x$ ফলনটো $[0, \pi]$ অন্তৰালত একৈকি হয়নে?

(g) Is the function $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ continuous over its domain $[-2, 2]$?

$[-2, 2]$ আদিক্ষেত্ৰত ফলন $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ অবিচ্ছিন্ন হয়নে?

(h) What is the n th derivative of e^{ax} ?
 e^{ax} ৰ n তম অবকলজটো কি হ'ব?

(i) State whether the statement is true or false :

The function $y = |x|$ is differentiable in $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা : ফলন $y = |x|$, $(-\infty, 0)$ আৰু $(0, \infty)$ অন্তৰালত অৱকলন।

(j) Write the Maclaurin series for e^x .

e^x ৰ মেক্লেৰিন শ্ৰেণীটো লিখা।

(k) If $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$, then find the value of

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$$

যদি $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ তেন্তে

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{6 + f(x)}$$
 ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(l) Find the value of $\sin \left(\arcsin \frac{\pi}{6} \right)$.

$$\sin \left(\arcsin \frac{\pi}{6} \right)$$
 ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(m) State whether the statement is true or false :

The function $f(x) = \cos x$ is increasing in the interval $[0, \pi]$.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা :

ফলন $f(x) = \cos x$, $[0, \pi]$ অন্তৰালত বৰ্ধমান হব।

(n) State the Leibnitz theorem.

লীবনিট্জৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(o) Find the average rate of change of $y = x^2 + 1$ w. r. t. x over the interval $[3, 5]$.

x সাপেক্ষে $[3, 5]$ অন্তৰালত $y = x^2 + 1$ ৰ গড় হাৰ মান উলিওৱা।

(p) Sketch the graph of $y = |x|$ shifted 2 units to the right and 1 unit down.

2 একক সোঁফালে আৰু 1 একক তললৈ স্থানান্তৰ কৰা, $y = |x|$ ফলনটোৰ লেখ অংকন কৰা।

(q) State whether the statement is true or false :

An equation of a curve of degree n has at most n asymptotes.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা :

এটা n ঘাতৰ বক্ৰৰ সমীকৰণৰ সৰ্বাধিক n অনন্তস্পৰ্শী আছে।

- (r) State whether the statement is true or false:

The slope of the tangent line to the curve $y = x^2 + 4x + 7$ at $x = 1$ is 6.

তলৰ উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা:

$x = 1$ বিন্দুত $y = x^2 + 4x + 7$ বক্ৰৰ স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা 6।

2. Answer **any five** questions : $2 \times 5 = 10$

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া:

- (a) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$$

- (b) Show that $f(x) = \frac{x^3}{4}$ and $g(x) = (4x)^{\frac{1}{3}}$ are inverses of one another.

দেখুওঁৱা যে $f(x) = \frac{x^3}{4}$ আৰু $g(x) = (4x)^{\frac{1}{3}}$ এটা আনটোৰ বিপৰীত।

- (c) Sketch the graph of the function:

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ and find its domain and range.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ ফলনটোৰ লেখ আঁকা আৰু ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিওঁৱা।

- (d) If $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, then find

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x).$$

যদি $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$ তেন্তে $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ ৰ

মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) If (যদি) $f = x^2 + y^2 + z^2$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 2f.$$

- (f) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

(g) Find the derivative of $\tan x$ w.r.t. $\sin x$.

$\sin x$ সাপেক্ষে $\tan x$ ৰ অবকলজ উলিওৱা।

(h) If the function $f(x) = \begin{cases} 5x-1, & x \leq 1 \\ kx^3, & x > 1 \end{cases}$ is continuous everywhere, then find the value of k .

$$\text{যদি } f(x) = \begin{cases} 5x-1, & x \leq 1 \\ kx^3, & x > 1 \end{cases}$$

ফলনটো সদায়েই অবিচ্ছিন্ন হয়, k ৰ মান নির্ণয় কৰা।

(i) If $y = e^{a \sin^{-1} x}$, prove that

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0.$$

যদি $y = e^{a \sin^{-1} x}$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0$$

(j) Show that $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ does not exist.

দেখুওৱা যে, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ স্থিত নহয়।

3. Answer **any four** questions : 5×4=20
যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find $\frac{dy}{dx}$ if $y^2 = x^2 + \sin xy$

$\frac{dy}{dx}$ উলিওৱা যদি $y^2 = x^2 + \sin xy$

(b) Show that the point (2, 4) lies on the curve $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. Also find the tangent and normal to the curve at (2, 4). 1+(2+2)=5

দেখুওৱা যে (2, 4) বিন্দুটো $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ বক্ৰৰ ওপৰত আছে। আকৌ (2, 4) বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(c) Show that the area of the triangle ABC is $\frac{1}{2} bc \sin A$.

দেখুওৱা যে ABC ত্ৰিভুজৰ কালি $\frac{1}{2} bc \sin A$

(d) Evaluate using L'Hospital's rule :

এল' হ'চপিতাল নীতি প্ৰয়োগ কৰি মান নির্ণয় কৰা :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

- (e) Find the maximum and minimum value of the function. $2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}=5$

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 6$$

ফলন $y = x^3 - 2x^2 + x + 6$ ৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা।

- (f) Apply ε - δ definition to show that the following function is continuous at $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ε - δ সূত্র প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে তলৰ ফলনটো $x = 0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

- (g) If (যদি) $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$, show that (দেখুওৱা যে)

(i) $(1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$

(ii) $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2y_n = 0$

$$3+2=5$$

- (h) Using definition find $\frac{\partial u}{\partial x}$ at (1,1) if

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

সূত্র প্ৰয়োগ কৰি (1,1) বিন্দুত $\frac{\partial u}{\partial x}$ ৰ মান উলিওৱা

$$\text{য'ত } u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

4. Answer **any four** questions: $10 \times 4 = 40$
যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া:

- (a) (i) State and prove Rolle's theorem. 5

ব'লৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

- (ii) If u is a homogeneous function of x and y of degree n , show that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

5

u এটা n -ঘাতৰ x আৰু y ৰ সুসম ফলন হ'লে, দেখুওৱা যে

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

(b) If $z = \log \tan \left(\frac{y}{x} \right)$, then verify

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

যদি $z = \log \tan \left(\frac{y}{x} \right)$, তেন্তে সত্যতা প্রমাণ কৰা

$$\text{যে } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

(c) (i) If $u = x \sin^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + y \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$,

find the value of

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \text{ at } (1,1) \quad 5$$

যদি $u = x \sin^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + y \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$,

তেন্তে (1,1) বিন্দুত $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ ৰ

মান নির্ণয় কৰা।

(ii) If

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

show that $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ 5

$$\text{যদি } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

তেন্তে দেখুওৱা যে, $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$

(d) (i) State Euler's theorem on homogeneous function and verify

it for the function $u = \frac{x(x^3 - y^3)}{x^3 + y^3}$

5

সুসম ফলনৰ ইউলাৰৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখা আৰু ইয়াৰ সত্যতা u ফলনৰ বাবে পৰীক্ষা কৰা

$$\text{য'ত } u = \frac{x(x^3 - y^3)}{x^3 + y^3}$$

(ii) If $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(\theta h)$,
 $0 < \theta < 1$, find θ when $h = 7$ and
 $f(x) = \frac{1}{1+x}$. 5

যদি $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(\theta h)$
 $0 < \theta < 1$, তেন্তে θ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত
 $h = 7$ আৰু $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(e) Using Maclaurin's theorem, expand $\cos x$ in ascending powers of x .
 মেক্লেৰিনৰ উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰি $\cos x$ ক উৰ্ধ্বগামী
 x ৰ ঘাতত প্ৰসাৰ কৰা।

(f) (i) State Lagrange's mean value theorem and verify it for the function $f(x) = \log x$ in $[1, e]$
 $2+3=5$

লেগৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ উক্তিটো লিখা
 আৰু ইয়াৰ সত্যতা ফলন $f(x) = \log x$ ৰ বাবে
 $[1, e]$ অন্তৰালত প্ৰমাণ কৰা।

(ii) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) : $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 5$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \tan x}{\log x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \log(1+x)}{x \sin x}$

(g) If $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, prove that

$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\} \{(n-4)^2 - m^2\} \dots \{(4^2 - m^2)(2^2 - m^2)(-m^2)\}$$

যদি $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,

$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\} \{(n-4)^2 - m^2\} \dots \{(4^2 - m^2)(2^2 - m^2)(-m^2)\}$$

(h) (i) Let $f(x) = (x-a) \cos\left(\frac{1}{x-a}\right)$ for

$x \neq a$ and let $f(a) = 0$. Show that f is continuous at $x = a$ but not derivable at that. 5

ধৰা হ'ল $f(x) = (x-a) \cos\left(\frac{1}{x-a}\right)$,

$x \neq a$ আৰু ধৰা হ'ল $f(a) = 0$ । দেখুওৱা যে f ফলন $x = a$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন, কিন্তু অৱকলন নহয়।

$$(ii) \text{ Let } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + \cos x, & \text{if } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Show that $f(x)$ is continuous at $x=0$. 5

ধরা হ'ল $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + \cos x, & \text{if } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{if } x = 0 \end{cases}$

দেখুওরা যে $f(x)$ ফলন $x=0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(i) (i) If $u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$, prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u. \text{ Hence}$$

deduce that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2 \cos 2u - 1) \sin 2u$$

$$5+2=7$$

যদি $u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$, তেস্তে প্রমাণ

করা যে $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ । ইয়ার

পরা সাব্যস্ত করা যে

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2 \cos 2u - 1) \sin 2u$$

(ii) If $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$, show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad 3$$

যদি $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$, দেখুওরা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(j) (i) Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

is continuous at $(0,0)$ 5

দেখুওরা যে ফলন

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(ii) Using Lagrange's mean value theorem in $[a, b]$. Prove that

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2} \text{ for}$$

positive values of a, b . 5

লেগৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰি $[a, b]$ অন্তৰালত, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2},$$

a, b ধনাত্মক মানৰ বাবে।

OPTION-B

Paper : MAT-HG-1026

(Honours Generic)

(Analytical Geometry)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer **any ten** questions : $1 \times 10 = 10$

যিকোনো দহটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ :

(i) What is the locus represented by the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$?

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণটোৰে কি সঞ্চালপথ সূচায় ?

- (ii) If the lines $y = mx$ and $y = m'x$ are conjugate diameters of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, then write down the value of mm' .

যদি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ $y = mx$ আৰু

$y = m'x$ দুভাগ সংযুক্ত ব্যাস হয়, তেন্তে mm' ৰ মান লিখা।

- (iii) Write down the parametric form of the equation of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ সমীকৰণটোক প্ৰাচলিক ধৰণত লিখা।

- (iv) What is the general equation of a plane parallel to x -axis?

x -অক্ষৰ সমান্তৰাল হোৱা সাধাৰণ সমতলৰ সমীকৰণ কি?

- (v) Write down the centre and radius of the sphere given by the equation

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

সমীকৰণৰ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসার্ধ লিখা।

- (vi) Write the condition, if $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ represents a pair of perpendicular lines.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ই এযোৰ পৰস্পৰ লম্বভাৱে থকা সৰল ৰেখা নিৰূপণ কৰাৰ চৰ্ত উল্লেখ কৰা।

- (vii) Write the condition that the general equation of the second degree

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

may represent a pair of straight lines?

দ্বিতীয় ঘাতৰ সাধাৰণ সমীকৰণ

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

যে যোৰ সৰলৰেখা বুজোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

- (viii) Define a conic.

শংকু এটাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

- (ix) Write the equation of the normal to the parabola $y^2 = 4ax$ at $(am^2, -2am)$.

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ $(am^2, -2am)$ বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণটো লিখা।

(x) For what values of a , the transformation $x = x' + 2$, $y = ay' - 3$ is a translation?

a ৰ কি মানৰ বাবে $x = x' + 2$, $y = ay' - 3$ ৰূপান্তৰটো এটা স্থানান্তৰ?

(xi) Define conjugate diameters of an ellipse.

উপবৃত্ত এটাৰ সংযুক্ত ব্যাসৰ সংজ্ঞা লিখা।

(xii) Find parametric equations of the line passing through $(4, 2)$ and parallel to $\vec{v} = (-1, 5)$.

$(4, 2)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা $\vec{v} = (-1, 5)$ ৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ প্ৰাচলিক সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(xiii) Find the distance between the points $(1, -2, 0)$ and $(4, 0, 5)$.

$(1, -2, 0)$ আৰু $(4, 0, 5)$ বিন্দু দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

(xiv) If $\vec{u} = i - 3j + 2k$ and $\vec{v} = i + j$, find the magnitude of $\vec{u} + \vec{v}$.

যদি $\vec{u} = i - 3j + 2k$ আৰু $\vec{v} = i + j$, তেন্তে $\vec{u} + \vec{v}$ ৰ মাপাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(xv) Define dot product of two vectors.

দুটা ভেক্টৰ অদিশ পূৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(xvi) Find the unit vector that has the same direction as $\vec{u} = i - 2j + 2k$.

$\vec{u} = i - 2j + 2k$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(xvii) What is the value of $i \cdot (i \times j)$?

$i \cdot (i \times j)$ ৰ মান কি?

(xviii) Find the point on the conic

$\frac{8}{r} = 3 - \sqrt{2} \cos \theta$ whose radius vector is 4.

$\frac{8}{r} = 3 - \sqrt{2} \cos \theta$ শাংকৰৰ ওপৰত থকা বিন্দু এটা নিৰ্ণয় কৰা য'ত ব্যাসাৰ্ধ ভেক্টৰ 4।

2. Answer **any five** questions : $2 \times 5 = 10$

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the equation of the line $3x + 4y - 10 = 0$ when the origin is transferred to the point $(2, 1)$.

মূলবিন্দুক $(2, 1)$ বিন্দুলৈ স্থানান্তৰ কৰিলে

$3x + 4y - 10 = 0$ সমীকৰণটোৰ কি ৰূপান্তৰ হ'ব যদিহে অক্ষদ্বয়ক কোনো দিশতে ঘূৰোৱা নহয়।

- (b) If the two pair of lines
 $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ and
 $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ be such that each
 pair bisects the angle between the
 other pair, prove that $pq + 1 = 0$.

যদি $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ আৰু
 $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ সৰলৰেখা দুযোৰৰ
 প্রতিযোৰেই আনযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক
 হয়, প্রমাণ কৰা যে $pq + 1 = 0$

- (c) Find the angle between the vector
 $\vec{u} = 3i - 4j + 12k$ and $\vec{v} = -4i - 3k$.

$\vec{u} = 3i - 4j + 12k$ আৰু $\vec{v} = -4i - 3k$ ভেক্টৰ
 দুটাৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰা।

- (d) Find the vertex and focus of the
 parabola $4y^2 - 20x - 8y + 39 = 0$.

$4y^2 - 20x - 8y + 39 = 0$ অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দু
 আৰু নাভি উলিওৱা।

- (e) Find the centre of the ellipse
 $2x^2 + 3y^2 - 4x + 5y + 4 = 0$

$2x^2 + 3y^2 - 4x + 5y + 4 = 0$ উপবৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ
 নির্ণয় কৰা।

- (f) Define pole and polar of a conic.

এটা শাংকৰৰ ধ্রুববিন্দু আৰু ধ্রুৱীয়ৰেখাৰ সংজ্ঞা লিখা।

- (g) Prove that the equation
 $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$
 represents two lines and find their
 point of intersection.

প্রমাণ কৰা যে, $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$
 ই এযোৰ সৰলৰেখা নিকপণ কৰে আৰু ইহঁতৰ ছেদবিন্দুৰ
 স্থানাংক নির্ণয় কৰা।

- (h) Find the angle between the lines
 represented by the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে নিকপণ কৰা সৰলৰেখা দুভালৰ মাজৰ কোণ
 নির্ণয় কৰা।

- (i) Find the joint equation of the straight lines which bisect the angles between the *two* lines given by

$$3x^2 + 6xy - y^2 = 0.$$

$3x^2 + 6xy - y^2 = 0$ ৰেখাদ্বয়ৰ মধ্যৱৰ্তী কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুভালৰ যৌথ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (j) Find the direction cosines of the vector $\vec{u} = 2i + 3j + 4k$.

$\vec{u} = 2i + 3j + 4k$ ভেক্টৰৰ দিশাংক নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer **any four** questions : $5 \times 4 = 20$.

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Transform the equation $x^2 + 2xy \tan 2\alpha - y^2 = a^2 \sec 2\alpha$ to rectangular axes inclined at angle α to the old rectangular axes.

$x^2 + 2xy \tan 2\alpha - y^2 = a^2 \sec 2\alpha$ সমীকৰণটোক নতুন কাৰ্টেচীয় অক্ষসাপেক্ষে ৰূপান্তৰ কৰা য'ত নতুন অক্ষদ্বয়ে পুৰণি অক্ষদ্বয়ৰ লাগত α কোণ কৰে।

- (b) Find the equation of the pair of tangents from a given point (x_1, y_1) to the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) ৰ পৰা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শকযোৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) Show that the product of the perpendiculars from any point (x_1, y_1) on the lines given by

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \text{ is}$$

$$\frac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

দেখুওৱা যে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখা দুভালৰ ওপৰত যিকোনো বিন্দু (x_1, y_1) ৰ পৰা টনা লম্ব দুভালৰ পূৰণ ফল

$$\frac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

- (d) Find the equation of the tangent at (x_1, y_1) on the conic

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শাংকৰৰ (x_1, y_1) বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) Find the centre of the conic

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Hence show that parabola is a non-central conic.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শাংকৰৰ কেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াৰ পৰা দেখুওৱা যে, অধিবৃত্ত এটা অকেন্দ্ৰীয় শাংকৰ।

- (f) Find a vector that is orthogonal to both of the vectors $\vec{u} = 2i - j + 3k$ and $\vec{v} = -7i + 2j - k$.

$\vec{u} = 2i - j + 3k$ আৰু $\vec{v} = -7i + 2j - k$ ভেক্টৰ দুটিৰ উভয়ৰে লম্ব হোৱা ভেক্টৰ এটি নিৰ্ণয় কৰা।

- (g) Find the equation of the directrix of the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ শাংকৰটোৰ নিয়মিকা নিৰ্ণয় কৰা।

- (h) Find the asymptotes of the hyperbola $xy + ax + by = 0$.

$xy + ax + by = 0$ পৰাবৃত্তৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাদ্বয় নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer **any four** questions: 10×4=40
যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

- (i) (a) Show that $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ is numerically equal to the volume of the parallelepiped of which the three concurrent edges are $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. 5

দেখুওৱা যে $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ এ \vec{a}, \vec{b} আৰু \vec{c} ৰ দ্বাৰা কৌণিক বাহু তিনিটা নিৰ্দেশ কৰা চৌপলটোৰ আয়তন বুজায়।

- (b) Find the equation of the line in 3-space that passes through the points $(2, 3, 4)$ and $(0, -1, 2)$. 5

$(2, 3, 4)$ আৰু $(0, -1, 2)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) (a) Find the area of the triangle that is determined by the points $P(5, -2, 1)$, $Q(2, 4, 2)$ and $Q(3, 4, 5)$. 5

$P(5, -2, 1)$, $Q(2, 4, 2)$ আৰু $Q(3, 4, 5)$ বিন্দুৰে নিৰ্দেশ কৰা ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Find the vector and scalar projections of $\vec{u} = 2i + 3j + 5k$ onto $\vec{v} = 2i - 2j - k$. 5

$\vec{v} = 2i - 2j - k$ ভেক্টৰৰ ওপৰত $\vec{u} = 2i + 3j + 5k$ ৰ সদিশ আৰু অদিশ প্ৰক্ষেপ নিৰ্ণয় কৰা।

- (iii) (a) Find the equation of the bisectors of the angles between the pair of lines given by $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখা দুভালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Find the equation of the polar of $P(x_1, y_1)$ with respect to the conic $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. 5

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ শাংকৰ সাপেক্ষে $P(x_1, y_1)$ ৰ ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (iv) (a) Find λ such that the equation $12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda = 0$ may represent a pair of straight lines. 5

$12x^2 - 10xy + 2y^2 + 11x - 5y + \lambda = 0$ এ দুভাল সৰলৰেখা বুজালে λ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Find the polar equation of a circle. 5

এটা বৃত্তৰ ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (v) (a) Find the condition that the line $y = mx + c$ is a tangent to the parabola $y^2 = 4ax$. 5

$y = mx + c$ রেখাভাল $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ স্পৰ্শক হোৱাৰ চৰ্ত নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Prove that the sum of the reciprocals of two perpendicular focal chords of a conic is constant. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা শাংকুৰ পৰস্পৰ লম্ব হোৱা নাভি জ্যাৰ প্ৰতিক্ৰমৰ সমষ্টি ধ্ৰুৱক।

- (vi) (a) Remove the xy term from the equation $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ by rotating the axes. 5

অক্ষদ্বয়ক ঘূৰাই $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ সমীকৰণৰ পৰা xy পদ অপনয়ন কৰা।

- (b) Find the equation of the pair of tangents from a given (x_1, y_1) point

to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 5

এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) পৰা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপবৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শকযোৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (vii) (a) If the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents a pair of parallel straight lines, show that

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}.$$

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখাক বুজালে

$$\text{দেখুওৱা যে } \frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$$

- (b) If l and l' are the lengths of the two segments of a focal chord,

prove that $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$, where $(a, 0)$

is the focus of the conic. 5

কোনো এভাল নাভি জ্যাৰ অংশ দুটি l আৰু l'

হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{1}{a}$ য'ত $(a, 0)$

হ'ল শংকুৰ নাভি।

(viii) (a) Show that the lengths of the semi-axes of the conic

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = d \text{ are } \frac{d}{\sqrt{a+h}}$$

$$\text{and } \frac{d}{\sqrt{a-h}}. \quad 5$$

$ax^2 + 2hxy + by^2 = d$ শাংকৰ অৰ্ধ

অক্ষদ্বয়ৰ দৈৰ্ঘ $\frac{d}{\sqrt{a+h}}$ আৰু $\frac{d}{\sqrt{a-h}}$ বুলি দেখুওৱা।

(b) Find the condition that the line $lx + my = n$ touches the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad 5$$

$lx + my = n$ ৰেখাভালে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপবৃত্তক স্পৰ্শ কৰাৰ চৰ্তটো উলিওৱা।

(ix) (a) If e_1 and e_2 be the eccentricities of a hyperbola and its conjugate,

$$\text{show that } \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1. \quad 5$$

সংযুগ্ম পৰাবৃত্ত এযোৰৰ উৎকেন্দ্ৰতা e_1 আৰু

$$e_2 \text{ হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে } \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$$

(b) If $(at_1^2, 2at_1)$ and $(at_2^2, 2at_2)$ are the two end points of a focal chord of the parabola $y^2 = 4ax$, prove that $t_1 t_2 = -1$. 5

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ নাভিলম্বীয় জ্যা এডালৰ দুই ঘূৰৰ বিন্দু দুটাৰ স্থানাংক $(at_1^2, 2at_1)$ আৰু $(at_2^2, 2at_2)$ হ'লে, প্ৰমাণ কৰা $t_1 t_2 = -1$ ।

(x) (a) Prove that the eccentric angles of the extremities of two conjugate semi-diameters of an ellipse differ by a right angle. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা উপবৃত্তৰ দুডাল অনুবন্ধী অৰ্ধব্যাসৰ প্ৰান্তবিন্দুৰ উপকেন্দ্ৰিক কোণৰ পাৰ্থক্য এক সমকোণ।

(b) If the polars of (x_1, y_1) and (x_2, y_2)

w.r. to $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ are at right;

angles, then show that

$$b^4 x_1 x_2 + a^4 y_1 y_2 = 0. \quad 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ পৰাবৃত্ত সাপেক্ষে } (x_1, y_1)$$

আৰু (x_2, y_2) বিন্দুৰ প্ৰৱৰ্তী বেষ্টা দুভাল

লম্বমান হ'লে দেখুওৱা যে

$$b^4 x_1 x_2 + a^4 y_1 y_2 = 0$$